(G)

Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Leçons : 159, 161, 181

Réf. : Beck, Malick, Peyré : Objectif agrégation p 97

Zuily, Queffélec, Analyse pour l'agrégation p 205-206

Rq : On n'utilise pas Hahn-Banach dans cette version

Lemme 1 : [BMP]

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel, C une partie convexe fermée de E et $x \in E \setminus C$. Mq :

$$\exists f \in E^* \,/\, f(x) > \sup_{y \in C} f(y)$$

Lemme 2 : ♡

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel et A une partie de E. Mq

$$x \in \overline{co\, A} \iff \forall f \in E^*, \ f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y)$$

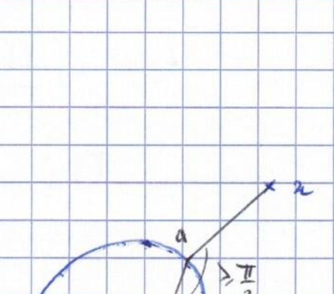
Th. 3 : [ZQ]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $B = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \|M\|_2 \leq 1 \}$ où $\|M\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Mx\|_2$

Mq. $co(O_n(\mathbb{R})) = B$

Lemme 1 :

Soit $x \in E \setminus C$, $a = p_C(x)$ et $f = \langle x-a, \cdot \rangle$



1) $f \in E^*$ (on a $\|f\| = \|x-a\|$)

2) $f(x-a) = f(x) - f(a) = \|x-a\|^2 > 0$ car $x \notin C$

donc $\boxed{f(x) > f(a)}$

3) Par caractérisation de $a = p_C(x)$,

$\forall y \in C, \ \underbrace{\cancel{Re}(\langle x-a, y-a \rangle)}_{\in \text{réel}} \leq 0$

donc $f(y) \leq f(a)$

donc $\sup\limits_{y \in C} f(y) \leq f(a) < f(x)$

donc $\boxed{\sup\limits_{y \in C} f(y) < f(x)}$

Lemme 2 :

1) On applique la contraposée du Lemme 1 à $C = \overline{\mathrm{co}\,A}$: $x \in E$

$\forall f \in E^*, \ f(x) \leq \sup\limits_{\overline{\mathrm{co}A}} f(y) \underset{\text{évident}}{\Longleftrightarrow} x \in \overline{\mathrm{co}\,A}$

2) Mq $M_1 = \sup\limits_{\overline{\mathrm{co}A}} f(y) = \sup\limits_{A} f(y) = M_2$

- $A \subset \overline{\mathrm{co}\,A}$ donc $M_2 \leq M_1$

- Soit $y \in \mathrm{co}\,A$. $\exists\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \lambda_1 \dots \lambda_n \leq / \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $a_1 \dots a_n \in A$ tels que $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$

Soit $f \in E^*$, $f(y) = \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=1} \underbrace{f(a_i)}_{\leq M_2} \leq M_2$

donc $\sup\limits_{\mathrm{co}A} f(y) \leq M_2$ — f continue

donc $M_1 = \sup\limits_{\overline{\mathrm{co}A}} f(y) \leq M_2$

donc $\boxed{M_1 = M_2}$ et : $\boxed{x \in \overline{\mathrm{co}A} \Leftrightarrow \forall f \in E^*, f(x) \leq \sup\limits_{A} f(y)}$

Th. 3 :

1) Préliminaires :

- par le th. de Carathéodory, $O_n(\mathbb{R})$ est compact donc $\mathrm{co}\,O_n(\mathbb{R})$ est compacte. (donc fermée)

On a donc $\boxed{x \in \overline{\mathrm{co}\,O_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow x \in \mathrm{co}\,O_n(\mathbb{R})}$

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^t B)$ est un espace de Hilbert

2) Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ux\|_2 = \|x\|$

donc $\|U\|_2 \leq 1$ (en fait $\|U\|_2 = 1$)

donc $U \in B$

donc $O_n(\mathbb{R}) \subset B$ — B convexe

donc $\boxed{co\, O_n(\mathbb{R}) \subset B}$

3) **Lemme** : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : E \to E^*$ est un isomorphisme
$M \mapsto \varphi_M : X \mapsto Tr(XM)$

- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi_M \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ + dimension finie donc $\varphi_M \in E^* = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$

et $\boxed{\varphi \text{ est bien définie, et } \varphi \text{ est linéaire}}$

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\varphi_M = 0$.

$\forall 1 \leq i,j \leq n$, $\varphi_M(E_{ij}) = Tr(E_{ij}M) = m_{ij} = 0 \Rightarrow M = 0$

donc φ est injective — dimension finie

donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme}}$

4) a/ Soit $X \in B$. Mq $x \in co(O_n(\mathbb{R}))$. D'après le Lemme 2

$X \in co(O_n(\mathbb{R})) \iff \forall f \in E^*, f(X) \leq \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} f(U)$

$$\boxed{X \in co(O_n(\mathbb{R})) \iff \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ Tr(XM) \leq \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} Tr(UM)}$$

b/ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème de décomposition polaire :

$\exists (U_0, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \,/\, M = U_0 S$.

On note $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de S et $(e_1 \dots e_n)$ une bon de $\vec{vp}$.

$U_0^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} Tr(UM) \geq Tr(U_0^{-1}M) = Tr(S)$

donc $\boxed{\sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} Tr(UM) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$

c°/ $Tr(X\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \langle X\Pi e_i, e_i \rangle$

$= \sum_{i=1}^{n} \langle U_0 S e_i , X^* e_i \rangle$ Cauchy-Schwarz et $\|\cdot\|_2$ = norme subordonnée

$\leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i U_0 e_i\|_2 \; \|X^*\| \|e_i\|$

. $\|U_0 e_i\| = \|e_i\| = 1$

. $\|X^*\|_2 = \|X\|_2 \leq 1$

. $\lambda_i \geq 0$

$$\boxed{Tr(X\Pi) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

donc $Tr(X\Pi) \leq \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} Tr(U\Pi)$

donc $X \in co(O_n(\mathbb{R}))$

donc $\boxed{B \subset co\, O_n(\mathbb{R})}$ d'où $\boxed{co(O_n(\mathbb{R})) = B}$